



MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România,
Filiala Caraș - Severin



Olimpiada Națională de Matematică, etapa locală (OLM), Caraș – Severin, 10.02.2024

Clasa a VIII-a

Barem de evaluare și notare:

(Orice soluție corectă se punctează la maxim)

1. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $[2022x] + \{2023x\} = 2023$, unde $[a]$ și $\{a\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real a .

G.M.10/2023

Soluție:

Din ecuația dată deducem că $[2023x] \in \mathbb{Z} \Rightarrow [2023x] = 0 \Rightarrow 2023x \in \mathbb{Z}$	2p
$[2022x] + 0 = 2023 \Rightarrow 2023 \leq 2022x < 2024$	1p
$\frac{2023}{2022} \leq x < \frac{2024}{2022}$	1p
$\frac{2023^2}{2022} \leq 2023x < \frac{2023 \cdot 2024}{2022}$	1p
și cum $2023x \in \mathbb{Z}$, deducem că $2023x = 2025 \Rightarrow x = \frac{2025}{2023}$.	2p

2. Arătați că numărul $2^{2026} + 2025^2$ este număr compus.

Soluție:

Notăm $a^2 = (2^{1013})^2$, $b^2 = 2025^2$ și $c^2 = 2ab = 2 \cdot 2^{1013} \cdot 2025 = 2^{1014} \cdot 45^2 = (2^{507} \cdot 45)^2$.	3p
De unde: $a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab - 2ab = (a + b)^2 - c^2 = (a + b + c)(a + b - c)$.	2p
$2^{2026} + 2025^2 = (2^{1013} + 2025 + 2^{507} \cdot 45)(2^{1013} + 2025 - 2^{507} \cdot 45)$	2p



MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România,
Filiala Caraș - Severin



3. În planul α se consideră $ABCD$ un patrulater convex oarecare, O intersecția diagonalelor sale și M un punct exterior planului α .
- a) Dacă $MA = MB = MC = MD$, demonstrați că $OA \cdot OC = OB \cdot OD$.
- b) Dacă $\angle ABC = 60^\circ$ calculați unghiul $\angle ADC$.

Soluție:

a) Se demonstrează că patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil. Se consideră puterea punctului O față de cercul circumscris patrulaterului $ABCD$	2p 2p
b) $ABCD$ patrulater inscriptibil $\Rightarrow \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ $\angle ADC = 120^\circ$	2p 1p

4. Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCDEF$, $AB = 8 \text{ cm}$ și $AD = 12 \text{ cm}$. Punctele M , N , P sunt mijloacele segmentelor AD , BE , respectiv CF .
- a) Demonstrați că planele (MNF) și (ABP) sunt paralele.
- b) Să se calculeze distanța dintre planele (MNF) și (ABP) .

Soluție:

a) $BPFN$ paralelogram $\Rightarrow BP \parallel NF$	1p
$MN \parallel AB, BP \parallel NF, MN \cap NF = \{N\}, AB \cap BP = \{B\} \Rightarrow (MNF) \parallel (ABP)$	1p
b) Fie S mijlocul lui MN , $\triangle FMN$ isoscel $\Rightarrow FS \perp MN, FS = 2\sqrt{21} \text{ cm}$	1p
Se arată că $MN \perp (FSP)$	1p
Distanța dintre plane este egală cu distanța de la P la (MNF) , $PT \perp FS$	1p
$RCPS$ paralelogram, $PS \perp SR, PS = 4\sqrt{3} \text{ cm}$.	1p
$A_{\triangle RPS} = SF \cdot PT = PS \cdot SR \Rightarrow PT = \frac{12\sqrt{7}}{7} \text{ cm}$	1p